A 43. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2012. október 26 – november 5.

1. A nemzetközi SETI („Search for extraterrestrial intelligence”) együttműködés a Földön kívüli élet nyomainak keresésével foglalkozik. Nemrégiben a kutatásban résztvevő csillagászok egy csoportja érdekes repülő objektumra lett figyelmes az égen. A megfigyelésekről készített szupertitkos jelentés egy részlete egy szemfüles újságírónak köszönhetően napvilágra került, amely azonnal meg is jelent a napilapokban, világszerte nagy pánikot keltve:

   „...A mérések szerint az azonosítatlan repülő tárgy (UFO) a Föld keringési síkjában közeledik a Naphoz. Az adatok elemzéséből az is kiderült, hogy az UFO pályája éppen olyan parabola, amelyiken szabadon esve (tehát esetleges hajtóműveit nem működtetve) a leghosszabb ideig tartózkodhat a Föld (jó közelítéssel kör alakú) pályáján belül. Ez az érdekes tény okot ad arra a feltételezésre, hogy a repülő tárgy egy földönkívüliek által küldött űreszköz, melynek célja minél több információt gyűjteni a földi életről...”

   Ebben a feladatban azt a célt tűzzük ki, hogy a jelentés alapján minél többet derítsünk ki az esetleges kém-UFO pályájáról. A számítások során feltételezhetjük, hogy a Nap gravitációs hatása mellett minden más hatás elhanyagolható. A Nap–Föld-távolságot vegyük állandónak, melynek értéke $R = 1$ Cs.E. (csillagászati egység).

   Milyen távolságra közelíti meg a Napot a speciális parabolapályán haladó UFO? Mennyi időt tölt el a repülő objektum a Föld pályasugarán belül?

   (Gnädig Péter és Vigh Máté)

2. Amikor két jóbarát, a sovány Péter és a kövér Pál megérkezik egy turistaszállásra, már csak egy rozoga emeletes ágy maradt szabadon. Péter jól szeret(ne) aludni, de tudja, hogy a társa álmában sokat mocorog. Melyik ágyat válassza, hol lesz nyugodtabb az álma?

   Így spekulál: „Ha a felső ágyra fekszem, akkor Pál mocorgásától csak nehezen jön mozgásba az emeletes ágy, de ez a mozgás a felső szinten nagyobb amplitúdójú lesz. Ha viszont alulra fekszem, Pál fent könnyen megmozgatja az ágyat, igaz, ez a mozgás az alsó szinten kisebb kitéréseket eredményez.”

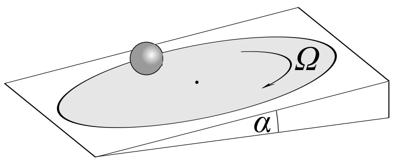
   Adjunk fizikus érvekkel alátámasztott tanácsot Péternek!

   (Gnädig Péter)

3. Ha oldalunkra fekszünk, és felső lábunkat a talajjal párhuzamosan előre-hátra lengetjük, egy elég határozott lengésidővel leng. Ha a felső lábunkat kissé megemeljük, és az alsót lengetjük, a lengésidő lényegesen más lesz. Egyszerű modellel magyarázzuk a jelenséget, és határozzuk meg a két frekvencia hányadosát!

   (Tichy Géza, az Ortvay verseny egyik alapítója)

4. Egy sík, érdes felületű, a vízszinteshez képest α szögben döntött korongot egy villanymotor egyenletesen, Ω szögsebességgel forgat. A forgó korongra egy gumilabdát helyezünk, és valamilyen irányban, valamilyen sebességgel és szögsebesség-vektorral elgurítjuk. A labda kezdőfeltételeinek függvényében vizsgáljuk meg, mozgása során milyen görbéken mozoghat a labda középpontja! Kialakulhatnak-e speciális (például egyenes szakasz, kör) alakú pályák? (A labda mindvégig tisztán gördül.)

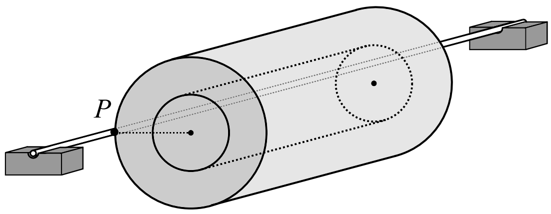
   (Vigh Máté)

5. (Neil Armstrong emlékére)

   Egy elképzelés szerint úgy lehetne megkönnyíteni a holdutazást, hogy egy hosszú és könnyű kötelet két végén dokkolóberendezéssel bocsátunk Föld körüli pályára, és a szerkezetet forgásba hozzuk úgy, hogy amikor a kötél függőleges, akkor az alsó dokkolóberendezés a Föld felszínétől csak pár száz kilométerre lenne, és a földfelszínnel azonos sebességgel mozogna, míg a kötél másik vége a második kozmikus sebességgel haladna. A kötél két végéhez egyidőben csatlakozna egy Földről fellőtt és egy azonos tömegű a Holdról visszatérő űrhajó, majd fél fordulat után egyszerre leválnának a kötélről. Milyen paraméterekkel kell rendelkeznie egy ilyen űrparittyának? Stabilan pályán tud-e maradni? Mekkora gyorsulás érné a félfordulat alatt az űrhajósokat?

   (Bodor András)

6. Homogén tömegeloszlású, merev, egyenes hengerben annak teljes hosszában koaxiálisan hengeres üreget hozunk létre úgy, hogy az üreg sugara fele legyen a henger sugarának. Az üregbe a henger anyagából készült, ugyanolyan hosszúságú, szintén merev, tömör, egyenes hengert helyezünk úgy, hogy az pontosan illeszkedjen az üregbe, de ne szoruljon. A külső hengert a palástján lévő P ponton átmenő tengellyel látjuk el, majd a tengelyt vízszintesen csapágyazzuk. A rendszert az ábrán látható helyzetéből elengedjük.



a) Legfeljebb mekkora lehet a hengerek egymással érintkező felületei között a tapadási súrlódási együttható, ha azt tapasztaljuk, hogy az elengedés pillanatában a belső henger megcsúszik a külső hengerben?

b) Mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, hogy a belső henger a mozgás során ne csússzon meg a külső hengerben?

(Pálfalvi László)

7. Egy rugalmas szálra m tömegű pontszerű testet akasztunk, a nehézségi gyorsulás g. A rugalmas szál megnyújtva D_0 direkciós erejű rugóként viselkedik, feszítetlenül viszont egyáltalán nem fejt ki erőt (m, D_0 és g is választható 1-nek). Gondoskodunk róla, hogy a test csak a nyugalmi állapoton átmenő függőleges egyenes mentén mozoghasson. Mindenféle súrlódás és közegellenállás elhanyagolható. A testet egyensúlyi helyzetéből $2mg/D_0$ távolságra lehúzzuk, majd elengedjük.
a) Mennyi lesz a rendszer energiája (ezen a megjelenő maximális mozgási energiát értjük) és a mozgás periódusideje?
b) Most a rugalmas szál rugóállandóját *nagyon lassan* változtani kezdjük ($|\Delta D/D| \ll 1$ egy periódus alatt). A rugóállandó egy kritikus értékénél a rendszer viselkedése kvalitatívan megváltozik. Adjuk meg a rugóállandó e kritikus értékét, illetve a rendszer energiáját és a periódusidőt a kritikus állapotban!
c) Írjuk le a mozgást kvalitatíven a $D \to 0$ és $D \to \infty$ határesetekben! Határozzuk meg a rendszer energiájának és a periódusidőnek a határértékét ezekben a helyzetekben (ha a határérték 0 vagy ∞, adjuk meg az aszimptotikát is)! Vizsgáljunk meg néhány más, a mozgásra jellemző mennyiséget is!

(Szabó Attila)

8. Egy M tömegű bolygó körül R sugarú körpályán m tömegű hold kering, a tömegek összemérhetőek. A rendszer keringési síkjára merőlegesen homogén eloszlású, az R értéknél sokkal nagyobb átmérőjű meteornyaláb érkezik, mindegyik meteor kezdeti u sebessége azonos. A meteorokat a kettős rendszer gravitációs tere eltéríti eredeti irányuktól. (A meteorok áthaladása alatt a két nagy égitest pályamenti elmozdulása elhanyagolható.) Számítsuk ki a szórás hatáskeresztmetszetét, és vizsgáljuk meg, hogy egy végtelen távoli „ernyőn" felfogva milyen mintázatot rajzolnának ki a beérkező meteorok! Milyen „gravitációs interferencia-effektust" okoz a két vonzó test együttes jelenléte?

(Dávid Gyula)

9. Egy pontrészecske $L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ Lagrange-függvényében a $\mathbf{v}$ sebességvektor csak az $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$ egységvektor formájában szerepel: $L(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$, ahol $v = |\mathbf{v}|$ a sebességvektor abszolút értéke. Vezessük le a mozgásegyenleteket, és tanulmányozzuk lehetséges megoldásainak tulajdonságait! Próbáljuk a mozgásegyenleteket „tömeg $\cdot$ gyorsulás $=$ valami" alakra hozni! Milyen mennyiség lép most a tömeg helyére? Keressünk megmaradási tételeket! Vizsgáljuk meg a centrális erőtérben történő mozgás esetét, amikor a Lagrange-függvényben csak az $\mathbf{r}$ helyvektor $r = |\mathbf{r}|$ abszolút értéke szerepel!

(Dávid Gyula)

10. Vizsgáljuk a klasszikus „emlékező-oszcillátor" modelljét, melynek Lagrange-függvénye:

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2m}\dot{q}^2(t) - \frac{1}{2}k\, q(t) \int_0^t d\tau \chi(t-\tau)\, q(\tau).$$

A hatás variálásával vezessük le, és oldjuk meg analitikusan a mozgásegyenletet, ha a $\chi(t)$ emlékező függvény alakja:

$$\chi(t) = \begin{cases} \Gamma e^{-\Gamma t}, & \text{ha } t \geq 0, \\ 0, & \text{ha } t < 0, \end{cases}$$

és $\Gamma > 0$!

(Széchenyi Gábor)

11. Lineáris rugós láncban $2N$ darab m tömegű pontszerű golyót felváltva D_1 és D_2 rugóállandójú ideális rugók kötnek össze. A széleken lévő tömegeket D_2 rugóállandójú rugóval a falhoz rögzítjük. Határozzuk meg a lánc rezgési frekvenciáit! Hasonlítsuk össze a kapott sajátfrekvenciákat azzal, amit a végtelen lánc esetében kapnánk! Vizsgáljuk külön a $D_1 < D_2$ és $D_1 > D_2$ esetekben a sajátfrekvenciákat és a megfelelő sajátmódusokat!

(Cserti József, Oroszlány László és Széchenyi Gábor)

12. Acélpálca egyik vége falba van erősítve, a falból kiálló rész $l = 20$ cm hosszú. A pálca keresztmetszete derékszögű egyenközény, szélessége $a = 1$ cm, magassága $b = 0{,}4$ cm. A pálca végét megütjük; milyen hangot ad?

(szerző: Nagy Béla, 1881–1954, közli: Radnai Gyula)

13. A Stirling-motorok külsőégésű motorok, ahol egy zárt térfogatban melegítünk illetve hűtünk gázt, ami megfelelően tágulva vagy összehúzódva munkát végez.

a) Tegyük fel első körben, hogy a gáz hőmérséklete a teljes térfogatában felveszi a melegebb, illetve a hidegebb hőtartály hőmérsékletét, és hogy a nyomás a teljes rendszerben minden pillanatban homogén. Vizsgáljunk tehát egy rendszert, ami a következő körfolyamatot valósítja meg: állandó térfogatú melegítés, izoterm tágulás, állandó térfogatú hűtés, izoterm összehúzódás. Mekkora a körfolyamat mechanikai hatásfoka? Mennyivel kisebb, mint ami a Carnot-folyamat esetén lenne?

b) A Stirling-motorok lényege az, hogy a gáz az állandó térfogatú melegítés (és hűtés) közben nem a hőtartályból veszi fel (adja le) a hőt, hanem az úgynevezett regenerátorból: a gázt az állandó térfogatú folyamat során átnyomjuk egy sűrű, vékony lemezekből vagy porózus szerkezetű anyagból készített „szűrőn”, mellyel az áramlás közben hőt cserélve felmelegszik vagy lehűl. Az átpréselés csak elhanyagolható energiát igényel (hiszen az össztérfogat nem változik). A regenerátorban keletkező jelentős hőmérsékletgradiens miatti hővezetést szintén hanyagoljuk el!

Mutassuk meg, hogy a gáz a teljes folyamat során ugyanannyi hőt vesz fel a regenerátorból, mint amennyit annak lead, azaz a regenerátor átlaghőmérséklete nem változik, tehát hőfelvétel és hőleadás a külső hőtartályok felé csak az izoterm szakaszokban van! Mutassuk meg, hogy a körfolyamat hatásfoka így megfelel a Carnot-folyamat hatásfokának!

c) Egy valódi regenerátor nem tökéletes. Tegyük fel, hogy a regenerátor a szükséges hőmennyiségnek csak α-ad részét (pl. 90%-át) tudja biztosítani (illetve ekkora részét felvenni hűtéskor). Mennyire csökken le ekkor a Stirling-motor hatásfoka?

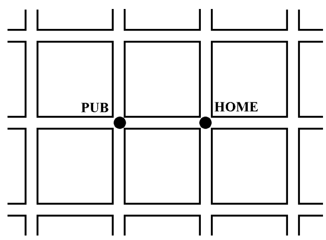
d) Tegyük fel, hogy a regenerátor ideális (azaz $\alpha = 1$), viszont a gáz nem tudja elérni a meleg külső hőtartály által biztosított maximális hőmérsékletet, hanem csak ΔT-vel alacsonyabb hőmérsékletre melegszik. Mennyivel csökken így a motor hatásfoka, és mennyivel csökken az egy ciklusban végzett munka?

(Varga Dezső)

14. Induljunk ki az alábbi három igaz állításból: *a*) Az S entrópia „természetes” változói az U belső energia, a V térfogat és az N részecskeszám. (A továbbiakban a térfogatot és a részecskeszámot állandónak tekintjük.) *b*) Egyensúlyban az entrópia felveszi maximális értékét. *c*) Egy függvény maximumában az első deriváltja zérus. Következtetés: $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} = 0$, azaz az egyensúlyi állapotban a rendszer hőmérséklete végtelen. Hol a hiba az okoskodásban?

(XY)

15. Főhősünk éppen a kocsma ajtaján lépett ki, mikor szembesült vele, hogy a sok léleknemesítő ital hatására bizony a tájékozódási képességét is elvesztette. Így aztán a részeg tengerész módjára elkezdi bolyongását a négyzet alaprajzú végtelen panelrengetegben (lásd ábra!). Minden kereszteződésben hosszas szédelgés után dönt a négy irány valamelyikéről (egyik irányt sem tünteti ki), majd az ezen irányba vezető úton végigdülöngél a következő útelágazásig, ahol ismételten véletlenszerűen dönt. Amennyiben eljut a kocsmától egy utcasarokra található lakásába, akkor a reggel saját ágyában éri. De ha a bolyongás során visszatalál a kocsmába, akkor inkább betér még egy-két italra, és reggel a kocsma padlóján tér magához.



a) Mennyi a valószínűsége, hogy a főhősünk a saját lakásán ébred, illetve a kocsmában tér magához – esetleg egyik helyre sem talál vissza, és a város körüli kukoricásban éri a reggel?
b) Hogyan módosulnak a valószínűségek, ha a sors fintora miatt a kocsma és a lakás közötti kis utcát lezárják?

(Széchenyi Gábor)

16. Mekkora erő ébred egy végtelen hosszú keskeny földelt egyenes vezető és egy tőle r távolságra elhelyezett q ponttöltés között? A vezetőt egy véges a sugarú hengerrel modelezzük, ahol $a \ll r$!

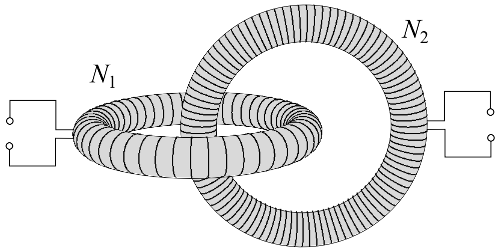
(Lájer Márton és Széchenyi Gábor)

17. Két egyenletes tekercselésű, N_1 és N_2 menetes légmagos toroid tekercs egymásba van fűzve az ábra szerint. A tekercsek keresztmetszete A_1 és A_2, középkörük sugara $R_1 = R_2 = R$, a középkörök síkjai merőlegesek egymásra.

a) Mekkora az egyes tekercsek önindukciós tényezője (L_{11} és L_{22})?

b) Mekkora a kölcsönös indukciós együttható (L_{12} és L_{21})? Függ-e az eredmény a tekercselések irányától?

c) Vizsgáljuk meg, teljesülnek-e az L_{ik} mátrixelemekre vonatkozó általános feltételek? Mi a helyzet $A_1 \ll A_2$ esetén?



(Gnädig Péter, Vankó Péter és Vigh Máté)

18. Létezik-e Magyarországon olyan $U = 400$ kV, $I = 2$ kA, és $f = 50$ Hz paraméterű elektromos távvezeték, aminek a sugárzási vesztesége már összemérhető az ohmos ellenállási veszteséggel?

(Etesi Gábor)

19. Két, szemre azonos átlátszó korong közül az egyik a jobbra, a másik a balra cirkulárisan polarizált fényt engedi csak át. Síktükrök, féligáteresztő tükrök és egy polarizálatlan, jó közelítéssel egyszínű fényforrás segítségével állapítsuk meg, hogy melyik korong melyik! (A féligáteresztő tükrök nem polarizálnak.) Tegyük fel, hogy a tükrök tetszőleges helyen pontosan (hullámhossznál pontosabban) elhelyezhetők! Kapunk még két korongot, amik valamilyen irány szerint lineárisan polarizált fényt engednek csak át. Meg tudjuk-e állapítani ugyanezekkel az eszközökkel, hogy mi ez a polarizációs irány?

(Bodor András)

20. Tegyük fel, hogy nem érvényes sem a speciális, sem az általános relativitáselmélet, a jelenségeket a klasszikus mechanika és elektrodinamika alapján tárgyaljuk! Tételezzük fel azonban, hogy a gravitációs tér befolyásolja a fény terjedését, mégpedig oly módon, hogy az adott téridő-pontban érvényes c fénysebesség a helyi Φ gravitációs potenciál függvénye! A testektől távol a gravitációs potenciál nullához tart, itt a fénysebesség tart a vákuumbeli fénysebesség ismert c_0 értékéhez. Hogyan kell megválasztanunk a $c(\Phi)$ függvényt, ha azt akarjuk, hogy ez az elmélet reprodukálja a gömbszimmetrikus testek által keltett gravitációs erőtér általános relativitáselméletből ismert gravitációs lencsehatását *a*) mindig, *b*) gyenge tér közelítésben? Milyen kísérletet tudnánk javasolni annak eldöntésére, hogy ez az elmélet mégsem helyes?

(Dávid Gyula)

21. Koordinátarendszerünk origójában egy M tömegű, R sugarú gömbszimmetrikus csillag helyezkedik el, körülötte kialakul az ismert Schwarzschild-féle téridő. Mekkorának látja a rendszer (csillag + a körülötte levő gravitációs tér) energiáját és impulzusát egy tőle végtelen távolban elhelyezkedő, a csillaghoz képest V sebességgel mozgó, Minkowski-féle inerciális megfigyelő? Mennyi a rendszer teljes tömege?

(Dávid Gyula)

22. Egy $S = 1$-es spinű részecske spin-állapotát nem ismerjük, de ebben az ismeretlen állapotban akárhányszor újra tudjuk preparálni. Ezen a sokszorosan újrapreparált sorozaton minimálisan hány mérést kell elvégezni, hogy a közös ismeretlen állapotot meghatározzuk? Konstruáljunk meg egy alkalmas méréssorozatot!

(Geszti Tamás)

23. Egy elektront olyan, állandó indukciójú mágneses mezőben helyezünk el, amelynek iránya a z koordinátával egyenletesen változik: $\mathbf{B} = (B\cos kz, B\sin kz, 0)$. Tegyük fel, hogy az elektronnak csak z-irányú impulzusa van.
a) Milyen sajátállapotai vannak az elektronnak, és mennyi ezek energiája?
b) Mekkora valószínűséggel mérjük egy ilyen állapotban az elektron spinjét a z koordinátával változó $\mathbf{B}$ vektorral egyállásúnak, illetve azzal ellentétesnek?
c) Kerüljön egy $+z$ irányban polarizált spinű, $(0, 0, p)$ impulzusú elektron a fent leírt térbe! Mikor képzelhető el, hogy egy idő után az elektron $-z$ irányban lesz polarizált? Ebben az esetben mennyi időre van szükség a polaritás megfordulásához? Ha ebben az állapotban kikapcsoljuk a mágneses teret, mennyi lehet az elektron impulzusa?

(Szabó Attila)

24. Mekkorának kellene lennie a GaAs félvezetőben a Ga és As atomok méretarányának, hogy a legszorosabb térkitöltést kapjuk?

(Tichy Géza, az Ortvay verseny egyik alapítója)

25. Egy egydimenziós, a periódusú potenciálban mozgó m tömegű részecske egy rácsperiódusnyi elmozdulásához tartozó $\mathbf{T}$ transzfermátrix spurját a következő képlet adja meg (a transzfermátrix explicit alakjára a továbbiakban nincs szükség):

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{T} \;=\; \frac{8}{\pi}\,\mathrm{Arcsin}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{E+\beta\,E_0}{E_0}}\right)\right]$$

A képletben E a részecske energiája, E_0 és β valós pozitív állandók, Arcsin pedig a függvény főértékét jelenti.

Határozzuk meg a rendszer sávszerkezetét! Adjuk meg zárt alakban az n-ik sáv $E_n(K)$ diszperziós relációját a K kváziimpulzus függvényében! Számítsuk ki az n-edik és az $(n+1)$-edik sáv közti gap nagyságát! Mitől függ, hogy a rendszer szigetelő vagy vezető lesz?

(Dávid Gyula)

26. Müonokat gyorsító berendezést szeretnénk építeni. Tekintsünk el a felmerülő sok-sok részletkérdéstől (hogy állítjuk elő a müonokat, hogyan alakítjuk részecskenyalábbá, hogyan tartjuk pályán, hogyan hozunk létre ütközéseket, stb.), ezzel szemben vizsgáljuk azt a kérdést, hogy mekkora energia érhető el a gyorsítás során!

Tegyük fel, hogy a müonok kezdetben álló helyzetben vannak, és egy L hosszúságú szakaszon gyorsítjuk őket (ezen egyetlen alkalommal futnak át – most lényegtelen, hogy az L hosszúságú szakasz esetleg egy gyűrűben fut, és többször körbemegyünk a gyűrűben). A gyorsító E_0 elektromos tér értéke végig állandó az L mentén (azaz a müon végső energiája eE_0L)

A legnagyobb gond a müonokkal az, hogy elbomlanak. Adjuk meg, hogy a müonok mekkora része jut el az L hosszúságú szakasz végére! Adjuk meg ezt a túlélési arányt mint E_0 és a végső elért energia függvényét!

Diszkutáljuk az eredményt megvalósíthatósági szempontból! Mai gyorsítási technológiákkal E_0 tipikusan 100 MV/m értékű. Mekkora energiájú müonnyalábot állíthatunk elő egy ilyen eszközzel, ha az el nem bomlott müonok száma a kezdetinek pl. ezrede? Megfigyelhető lenne-e a Higgs-részecske keletkezése ilyen nyalábok ütközésében, és ha nem, mekkora E_0-ra lenne szükség ahhoz, hogy elérjünk elegendő maximális energiát (a Higgs részecske nyugalmi tömegének kb kétszeresét)?

Mekkora lenne egy ilyen gyorsítóberendezés? Tegyük fel hogy maximálisan $B_0 = 5$ T erősségű eltérítő mágneseket tudunk használni egy tárológyűrűben – mekkora lenne ennek a sugara? Igaz-e, hogy a szinkrotronsugárzással való energiaveszteség jelentősen kisebb, mint a gyorsítás során betáplált teljesítmény?

(Varga Dezső)

27. Egy berendezés belsejében egy adott térrészben, vákuumban atommagok bomlanak, melyekből véletlenszerű irányban elektronok indulnak el adott, az elektron nyugalmi energiájánál jóval kisebb mozgási energiával. Ebben a térrészben közel homogén, z-irányú, B_s nagyságú erős mágneses tér van, ami egy-egy erővonal körüli helikális pályára kényszeríti az elektronokat. Az elektronok ilyen módon követik a mágneses erővonalat. A mágneses térerősség értéke az erővonalak mentén lassan lecsökken (azaz az erővonalak által elfoglalt keresztmetszet megnő, miközben az erővonalak széttartanak), az elektronok így átjutnak egy olyan térrészbe, ahol szintén homogén, B_s-nél jelentősen, akár több nagyságrenddel gyengébb, z-irányú B_w mágneses tér van.

Tegyük fel, hogy az elektronok kinetikus energiája kicsi, azaz az elektronok gyors keringésének megfelelő ciklotronsugár mindenhol jóval kisebb, mint a mágneses tér változásának tipikus hosszúságskálája. Eszerint csak a vezető rendű effektust keressük.

A bomlás egyenletes irányeloszlású, tehát kezdetben (könnyen megmutathatóan) az elektronok p_z impulzuskomponensének eloszlása egyenletes.

Határozzuk meg, hogy a gyenge mágneses térrel bíró tartományban milyen lesz az elektronok p_z impulzuskomponensének eloszlása! Mi a drasztikus változás oka?

Határozzuk meg az elektronok impulzusa és a mágneses tér iránya által bezárt szög eloszlását is ebben a tartományban! Definiáljuk kényelmes módon ezen szögeloszlás és a p_z impulzuseloszlás szélességét (pl. félértékszélesség, vagy ha létezik, akkor a szórás), és adjuk meg, hogy ez hogyan függ a B_w és B_s terek nagyságától, valamint az egyéb geometriai paraméterektől!

(Nagy Márton és Varga Dezső)

28. Egy gráfot csillagnak nevezünk, ha benne egy központi csomóponthoz egymással nem csatlakozó csomópontok kapcsolódnak. Legyen N a csillag sugarainak száma! Ezen a gráfon értelmezhetünk egy egyszerű Ising-modellt. Legyen a központi csomópont indexe 0, ekkor az $s = (s_0, s_1, \ldots, s_N)$ spinkonfiguráció energiája

$$H_N(s) = -J \sum_{i=1}^{N} s_i s_0 - h \sum_{i=1}^{N} s_i - h s_0.$$

Ha a környezet inverz hőmérséklete β, akkor az s konfiguráció megvalósulási valószínűsége

$$p_N(s) = \frac{e^{-\beta H_N(s)}}{\mathcal{Z}_{\mathcal{N}}},$$

ahol $\mathcal{Z}_N$ az állapotösszeg. A mágnesezettség sűrűsége a kerületi pontokon $m(s) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} s_i$. A feladat a következő: Adott egy jól viselkedő $f(z)$ függvény. Határozzuk meg a

$$\lim_{h \to 0^+} \lim_{N \to \infty} \langle f(m) \rangle_N$$

termodinamikai várható értéket, ahol $f(m)$ a mágneses sűrűség f függvényének termális várható értéke a fenti eloszlással! A limeszben h-val jobbról tartunk a 0-hoz. A helyes eredményt csak akkor kapjuk meg, ha a két határértéket a fent leírt sorrendben hajtjuk végre.

(Barankai Norbert)

29. A 80 kg-os Felix Baumgartner 39 km-es magasságból halált megvető bátorsággal leveti magát a mélységbe, 1527 méter magasan ejtőernyőt nyit, és épségben landol.

Az ugrás után mennyi idő elteltével és milyen magasan lépi át Baumgartner az aktuális magasságbeli hangsebességet, valamint mikor és milyen magasan hagyja el az aktuális közegbeli hangsebesség feletti sebességtartományt?

Ábrázoljuk a $\beta(t) = v(t)/c(t)$ hányadost a magasság függvényében 39 000 m és 1527 m között, ahol $v(t)$ és $c(t)$ a pillanatnyi sebesség és a hangsebesség az ugrás kezdetétől eltelt idő függvényében! Vajon többször is átlépi-e hősünk zuhanása közben a hangsebességet? Egyezik-e $\beta(t)$ maximumhelye a $v(t)$ zuhanási sebesség maximumhelyével?

Számolásaink során a hőmérséklet $T(z)$ és a hangsebesség $c(z)$ magasságfüggvényét vegyük a `http://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound` weboldalon található grafikonról!

A légnyomás $p(z)$ magasságfüggését a barometrikus magasságformula segítségével határozhatjuk meg, amelyben legyen a nehézségi gyorsulás g =9,8 m/s^2, a tengerszint feletti légnyomás $p_0 = 10^5$ Pa, és a levegő tengerszint közeli sűrűsége ρ_0 =1,225 kg/m^3. A levegő sűrűségének magasságfüggvénye legyen

$$\rho(z) = \frac{p(z)\, M}{R\, T(z)},$$

ahol M a levegő moláris tömege, R pedig az egyetemes gázállandó. A közegellenállásból származó lassító erőt vegyük $F = 1/2 \cdot A \cdot C \cdot \rho(z) \cdot v^2(z)$ nagyságúnak a hangsebesség feletti tartományokban is, és tekintsünk el a közegellenállási határsebességtől! Itt $C \approx$ 0,4 az ún. közegellenállási alaki tényező, mely az irodalom szerint közel van a gömb alaki tényezőjéhez, a fékezésben szerepet játszó effektív homlokfelületet válasszuk $A = 1$ m^2-nek!

Miért és mennyire tér el ez a modell a valóságtól?

(Homa Gábor és Tóth Gábor)

\end{document}